Correction du devoir surveillé $n°2$

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer :
   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2^{n+1} - 2$
   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$
   (c)
$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-i^2 + (2n+1)i\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$
2. (a) $2+4 = 6 = 2^3 - 2$
   (b) $1+2+1 = 2 = 2^2$
   (c) $1+1+1+2 = 5 = \frac{2\times 3\times 5}{6}$

Exercice 2:
Soient trois ensembles E, F et G, et soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Supposons que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$.
   Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$.
   Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
   Par injectivité de $g \circ f$, $x_1 = x_2$.
   Donc f injective.
2. Supposons que $g \circ f$ est surjective.
   Soit $z \in G$.
   Par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$.
   Posons $y = f(x)$. On a $y \in F$ et $z = g(y)$ donc g est surjective.
3. Supposons que $g \circ f$ est injective et que f est surjective.
   Soit y_1, $y_2 \in F$.
   Supposons que $g(y_1) = g(y_2)$.
   Or f est surjective donc il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
   D'où $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
   Or $g \circ f$ est injective, donc $x_1 = x_2$. D'où g est injective.
4. Supposons que $g \circ f$ est surjective et que g injective.
   Soit $y \in F$.
   On a $g(y) \in G$ et $g \circ f$ surjective f, donc il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x_1) = g(y)$.
   Or g est injective d'où $f(x_1) = y$. Donc f est surjective.

Exercice 3:
Soient x un réel de l'intervalle $]0\,;2\pi[$ et n un entier strictement positif.

1. On a $\mathbf{e}^{ix} \neq 1$. Donc, on peut utiliser la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathbf{e}^{ix}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{e}^{ikx}\right) &= \mathfrak{Re}\left(\mathbf{e}^{ix}\frac{1-\mathbf{e}^{inx}}{1-\mathbf{e}^{ix}}\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\mathbf{e}^{i\frac{(n+1)x}{2}}\frac{\mathbf{e}^{i\frac{nx}{2}}-\mathbf{e}^{-i\frac{nx}{2}}}{\mathbf{e}^{i\frac{x}{2}}-\mathbf{e}^{-i\frac{x}{2}}}\right)\\ &= \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. Considérons la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ définie sur $]0\,;2\pi[$, f est combinaison linaire de fonctions dérivables. Donc f est dérivable et pour tout $x \in\,]0\,;2\pi[$,

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{n} k\sin(kx)$$

On détermine une autre expression de f' à l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\sin\left(\left(n+1\right)x\right)+\sin\left(-nx\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(n+1\right)x\right)+\sin\left(nx\right)\right)}{2(1-\cos(x))}\\ &= \frac{-(n+1)\sin(nx)+n\sin\Big((n+1)x\Big)}{2-2\cos(x)}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sin(kx) = \frac{(n+1)\sin(nx)-n\sin\Big((n+1)x\Big)}{2-2\cos(x)}$.

Exercice 4:
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
On a $\lfloor x\rfloor \leqslant x$ et $\lfloor y\rfloor \leqslant y$ d'où $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant x+y$.
De plus, $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$ est un entier, donc $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor$.
On a $x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $y < \lfloor x\rfloor + 1$ d'où $x+y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$.
Par croissance de la partie entière, on en déduit que $\lfloor x+y\rfloor < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$.
Les termes de cette inégalité stricte étant entiers, on obtient $\lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.
Conclusion :

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$$

Exercice 5:

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}, 2^n | k\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ($0 \in A$) et majorée (par k de façon grossière). Donc A admet un plus grand élément que l'on note a. Donc, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $k = 2^a\, b$. De plus, b est impair car la maximalité de a serait mise en défaut dans le cas contraire.

   (b) Par contraposée, supposons que k n'est pas une puissance de 2.
   On a donc $b \geqslant 2$.
   Nous allons essayer de factoriser $2^k + 1$:

$$2^k + 1 = \left(2^{2^a}\right)^b - (-1)^b = \underbrace{\left(2^{2^a} + 1\right)}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{b-1} \left(2^{2^a}\right)^i (-1)^{b-1-i}\right)}_{\in \mathbb{N}}$$

   Or $b \geqslant 2$, donc $1 < 2^{2^a} + 1 < 2^k + 1$ donc $2^{2^a} + 1$ est un diviseur non trivial de $2^k + 1$.
   D'où $2^k + 1$ est composé.
   Conclusion : si $2^k + 1$ est un nombre premier, alors k est une puissance de 2.

On appelle **nombre de Fermat** un entier de la forme $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.

2. $F_0 = 3$ n'est pas divisible par 2 donc F_0 est premier ;
   $F_1 = 5$ est ni divisible par 2, ni par 3, donc F_1 est premier ;
   $F_2 = 17$ est ni divisible par 2, ni par 3, ni par 5 donc F_2 est premier ;
   $F_3 = 257$ est ni divisible par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 (car $259 = 210 + 49$ l'est), ni par 11 (car $220 + 33 = 253$ l'est), ni par 13 (car 260 l'est). De plus, $\lfloor\sqrt{257}\rfloor = 16$ donc F_3 est premier.

3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$.

   (a) $(F_n - 1)^2 + 1 = \left(2^{\left(2^n\right)}\right)^2 + 1 = 2^{\left(2^n + 2^n\right)} + 1 = 2^{\left(2^{n+1}\right)} + 1 = F_{n+1}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété "$F_n = 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$".
   Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   <u>Initialisation :</u> $2 + \prod_{i=0}^{-1} F_i = 2 + 1 = 3$ donc $P(0)$ est vraie.
   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.

$$F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1 = F_n^2 - 2F_n + 2 = F_n(F_n - 2) + 2 = F_n \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) + 2 = 2 + \prod_{i=0}^{n} F_i$$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   <u>Conclusion :</u> pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$.

   (c) Les rôles de n et m étant symétriques, on suppose sans perte de généralité que $n < m$. On va utiliser le fait que $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$ pour tout $a, b, q \in \mathbb{Z}$.

$$F_m \wedge F_n = F_n \wedge \left(F_m - F_n \prod_{i \in [\![0;m[\![\setminus\{n\}} F_i\right) = F_n \wedge 2 = 1$$

   La dernière égalité découle de l'imparité de F_n.